Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2024, Ordinaria

mentoor.es

Problema 1. Campo Gravitatorio

BepiColombo és una missió espacial que té per objectiu l'exploració de Mercuri. La missió va ser llançada l'any 2018, i hi arribarà el 2025. Un cop allà, posarà en òrbita dos satèl·lits al voltant del planeta. Un dels satèl·lits és el Mercury Planetary Orbiter (MPO), construït per l'Agència Espacial Europea, que orbitarà al voltant de Mercuri amb un radi orbital mitjà de 3 360 km.

a) **Considereu un satèl·lit que fa una òrbita circular al voltant de Mercuri. Deduïu l'expressió de la velocitat orbital del satèl·lit en funció del radi orbital i la massa de Mercuri (indiqueu clarament en quins principis o lleis físiques us baseu per fer la vostra deducció). Amb aquesta expressió, calculeu la velocitat orbital del satèl·lit MPO mentre orbita al voltant de Mercuri. Calculeu quantes voltes haurà fet al planeta al cap d'un any terrestre.**

b) **A partir de l'expressió general de l'energia mecànica, obtingueu la seva equació per al cas particular d'un satèl·lit en òrbita circular (cal que l'equació final només estigui expressada en funció de G, el radi orbital i les masses del satèl·lit i del planeta). Una vegada el satèl·lit MPO estigui orbitant al voltant de Mercuri, encara tindrà combustible per a poder fer maniobres. Considereu que el combustible disponible pot proporcionar una energia de $4,5 \times 10^9$ J. Determineu el valor màxim que podria tenir la massa del MPO per tal que amb l'energia disponible pogués escapar del camp gravitatori de Mercuri.**

Dades:
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.
Massa de Mercuri, $M_M = 3,285 \times 10^{23}$ kg.
Any terrestre = 365,25 dies.

Solución:

a) **Considereu un satèl·lit que fa una òrbita circular al voltant de Mercuri. Deduïu l'expressió de la velocitat orbital del satèl·lit en funció del radi orbital i la massa de Mercuri (indiqueu clarament en quins principis o lleis físiques us baseu per fer la vostra deducció). Amb aquesta expressió, calculeu la velocitat orbital del satèl·lit MPO mentre orbita al voltant de Mercuri. Calculeu quantes voltes haurà fet al planeta al cap d'un any terrestre.**

Para determinar la velocidad orbital v de un satélite que realiza una órbita circular alrededor de Mercurio, utilizamos la *Ley de Gravitación Universal* de Newton y la *Segunda Ley de Newton.* Tenemos los siguientes datos:

- Constante de gravitación universal: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.
- Masa de Mercurio: $M_M = 3,285 \cdot 10^{23}$ kg.
- Radio orbital del satélite MPO: $r = 3\,360$ km $= 3,36 \cdot 10^6$ m.
- Duración de un año terrestre: $t_{\text{año}} = 365,25$ días.

Según la *Ley de Gravitación Universal*, la fuerza gravitatoria F_g que actúa sobre el satélite es:

$$F_g = \frac{G \cdot M_M \cdot m}{r^2},$$

donde m es la masa del satélite. Por otro lado, la *segunda ley de Newton* establece que la fuerza neta que actúa sobre el satélite es igual a la masa del satélite por su aceleración centrípeta a_c:

$$F = m \cdot a_c.$$

Dado que el satélite realiza un movimiento circular uniforme, la aceleración centrípeta se expresa como:

$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

Igualando las dos expresiones de la fuerza:

$$\frac{G \cdot M_M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Simplificando m y una potencia de r:

$$\frac{G \cdot M_M}{r} = v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_M}{r}}.$$

Entonces,

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 3,285 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}{3,36 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}} = 2,55 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}.$$

Para obtener el número de orbitas en un año terrestre, priemro calculamos el período orbital T del satélite:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 3,360 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}{2,55 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}} = 8,28 \cdot 10^3\ \mathrm{s}.$$

Convertimos la duración de un año terrestre a segundos:

$$t_{\text{año}} = 365,25\ \text{días} \cdot 24\ \text{h/día} \cdot 3600\ \text{s/h} = 3,16 \cdot 10^7\ \text{s}.$$

Finalmente, calculamos el número de órbitas N:

$$N = \frac{t_{\text{año}}}{T} = \frac{3,16 \cdot 10^7\ \mathrm{s}}{8,28 \cdot 10^3\ \mathrm{s}} = 3816\ \text{órbitas}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital del satélite MPO es $v = 2{,}55 \cdot 10^3$ m/s y dará aproximadamente 3816 órbitas alrededor de Mercurio al cabo de un año terrestre.

b) A partir de l'expressió general de l'energia mecànica, obtingueu la seva equació per al cas particular d'un satèl·lit en òrbita circular (cal que l'equació final només estigui expressada en funció de G, el radi orbital i les masses del satèl·lit i del planeta). Una vegada el satèl·lit MPO estigui orbitant al voltant de Mercuri, encara tindrà combustible per a poder fer maniobres. Considereu que el combustible disponible pot proporcionar una energia de $4,5 \times 10^9$ J. Determineu el valor màxim que podria tenir la massa del MPO per tal que amb l'energia disponible pogués escapar del camp gravitatori de Mercuri.

Para determinar la masa máxima que podría tener el satélite MPO para escapar del campo gravitatorio de Mercurio con una energía disponible de $4,5 \cdot 10^9$ J, debemos tener en cuenta que la expresión general de la energía mecánica es:

$$E_m = E_c + E_p,$$

donde E_c es la energía cinética y E_p es la energía potencial gravitatoria. Para una órbita circular, estas energías se expresan como:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \qquad E_p = -\frac{GM_M m}{r}.$$

Así, la energía mecánica total es:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_M m}{r}.$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad orbital $v = \sqrt{\frac{GM_M}{r}}$:

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM_M}{r}\right) = \frac{GM_M m}{2r} = -\frac{GM_M m}{r}.$$

Entonces,

$$E_m = \frac{GM_M m}{2r} - \frac{GM_M m}{r} = -\frac{GM_M m}{2r}.$$

Para que el satélite escape del campo gravitatorio de Mercurio, la energía mecánica total debe ser al menos cero. Por lo tanto, el incremento de energía necesario es:

$$\Delta E_m = -E_m = \frac{GM_M m}{2r}.$$

Dado que el combustible disponible puede proporcionar una energía de $4,5 \cdot 10^9$ J:

$$\Delta E_m = 4,5 \cdot 10^9 \text{ J} = \frac{GM_M m}{2r}.$$

Despejando la masa máxima $m_{\text{máx}}$:

$$m_{\text{máx}} = \frac{2r\Delta E_m}{GM_M}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$m_{\text{máx}} = \frac{2 \cdot 3,360 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 4,5 \cdot 10^9 \text{ J}}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{kg}^{-2} \cdot 3,285 \cdot 10^{23} \text{ kg}} = 1,38 \cdot 10^3 \text{ kg}.$$

Por lo tanto, la masa máxima que podría tener el satélite MPO para escapar del campo gravitatorio de Mercurio, utilizando la energía disponible del combustible, es $m_{\text{máx}} = 1{,}38 \cdot 10^3$ kg.

Problema 2. Campo Gravitatorio

Al laboratori dissenyem un experiment amb dues masses que fan moviments independents. La primera massa és de $0,5$ kg i penja d'una molla vertical. La segona massa es troba subjectada a un disc vertical que gira a una velocitat angular de $6,41$ rad/s i el centre d'aquesta massa és a una distància de 19 cm del centre del disc. Ambdues masses s'il·luminen lateralment i s'observa que les seves ombres segueixen exactament el mateix moviment harmònic simple. Per a aconseguir-ho, deixem anar des de baix la massa de la molla just a $t = 0$ s, moment en què la massa del disc també passa pel punt més baix de la rotació.

a) **Escriviu l'equació de la posició vertical de les ombres respecte al temps. Trobeu la constant elàstica de la molla i l'energia mecànica del moviment harmònic simple.**
b) **Calculeu l'equació de la velocitat i l'energia cinètica respecte al temps de la massa que penja de la molla. Representeu en la quadrícula adjunta l'energia mecànica, l'energia potencial i l'energia cinètica en funció de la posició vertical per a la massa que penja de la molla.**

Solución:

a) **Escriviu l'equació de la posició vertical de les ombres respecte al temps. Trobeu la constant elàstica de la molla i l'energia mecànica del moviment harmònic simple.**

Primero, consideramos la posición vertical de la sombra de la masa que cuelga del resorte. Esta posición puede describirse como la componente vertical del vector posición de la masa respecto al centro del disco, que varía con el tiempo debido al movimiento armónico simple. La ecuación de la posición vertical es:

$$y(t) = A\cos(\theta) = A\cos(\omega t + \phi_0),$$

donde:
- $A = 0,19$ m es la amplitud del movimiento, que coincide con el radio,
- $\omega = 6{,}41$ rad/s es la velocidad angular,
- ϕ_0 es la fase inicial.

Dado que en $t = 0$ s la posición es $-A$, tenemos:

$$y(0) = -A = A\cos(\phi_0) \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi_0) = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \pi \text{ rad}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la posición queda:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \pi) = -A\cos(\omega t).$$

Sustituyendo los valores:

$$y(t) = -0{,}19 \text{ m} \cdot \cos(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t).$$

Para calcular la constante elástica del resorte, recordamos que la relación entre la velocidad angular ω, la constante elástica k y la masa m es:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad k = \omega^2 \cdot m.$$

Sustituyendo los valores:

$$k = (6{,}41 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}5 \text{ kg} = 20{,}54 \text{ N/m}.$$

La energía mecánica E_m en un movimiento armónico simple está dada por:

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2.$$

Sustituyendo los valores:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 20{,}54 \text{ N/m} \cdot (0{,}19 \text{ m})^2 = 0{,}371 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la posición es $y(t) = -0{,}19 \text{ m} \cdot \cos(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t)$, la constante elástica del resorte es 20,54 N/m y la energía mecánica es 0,371 J.

b) Calculeu l'equació de la velocitat i l'energia cinètica respecte al temps de la massa que penja de la molla. Representeu en la quadrícula adjunta l'energia mecànica, l'energia potencial i l'energia cinètica en funció de la posició vertical per a la massa que penja de la molla.

La velocidad $v(t)$ es la derivada de la posición $y(t)$ respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-0{,}19 \text{ m} \cdot \cos(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t)\right] = 0{,}19 \text{ m} \cdot 6{,}41 \text{ rad/s} \cdot \sin(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t).$$

Simplificando:

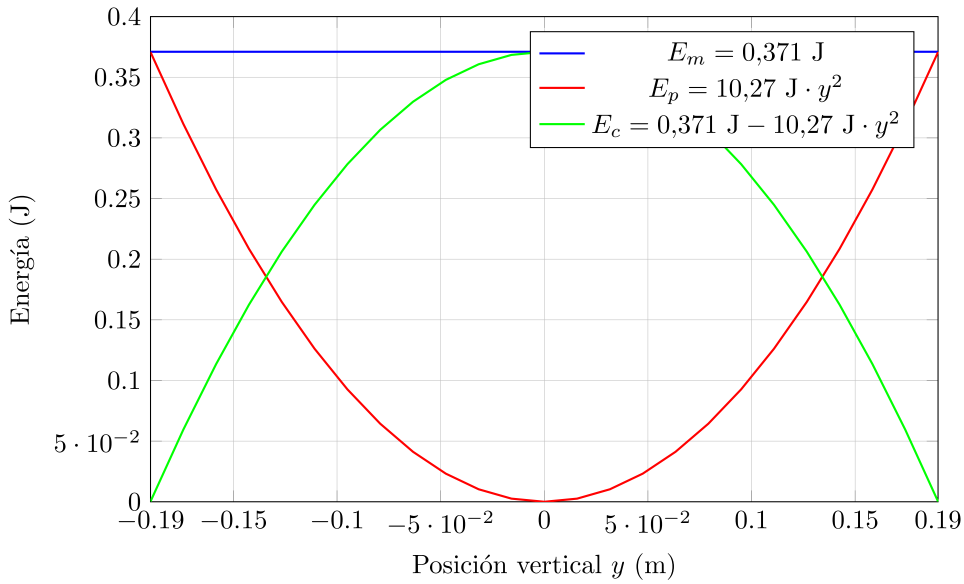
$$v(t) = 1{,}218 \text{ m/s} \cdot \sin(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t).$$

La energía cinética E_c está dada por:

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \text{ kg} \cdot (1{,}218 \text{ m/s} \cdot \sin(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t))^2 = 0{,}371 \text{ J} \cdot \sin^2(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t).$$

Las gráficas de la energía mecánica E_m, la energía potencial E_p y la energía cinética E_c en función de la posición vertical y son las siguientes:

- *Energía mecánica:* $E_m = 0{,}371$ J.
- *Energía potencial:* $E_p = \frac{1}{2} k y^2 = 10{,}27 \text{ J} \cdot y^2$.
- *Energía cinética:* $E_c = E_m - E_p = 0{,}371 \text{ J} - 10{,}27 \text{ J} \cdot y^2$.



Por lo tanto, la velocidad es $v(t) = 1{,}218 \text{ m/s} \cdot \sin(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t)$ y la energía cinética es $E_c(t) = 0{,}371 \text{ J} \cdot \sin^2(6{,}41 \text{ rad/s} \cdot t)$.

Problema 3. Campo Electromagnético

La superfície de la Terra és principalment aigua que conté ions en disolución i que li fan adquirir una càrrega neta negativa. Es pot considerar que la Terra té un camp elèctric en punts propers a la seva superfície amb un mòdul constant de 150 N/C.

a) **Dibuixeu l'esfera terrestre i representeu-hi el camp elèctric al voltant de la superfície. Calculeu el valor de la càrrega total que produeix aquest camp elèctric. Per fer-ho, considereu que el camp elèctric creat per una superfície esfèrica carregada uniformement és igual al generat per tota la càrrega situada al centre de l'esfera.**

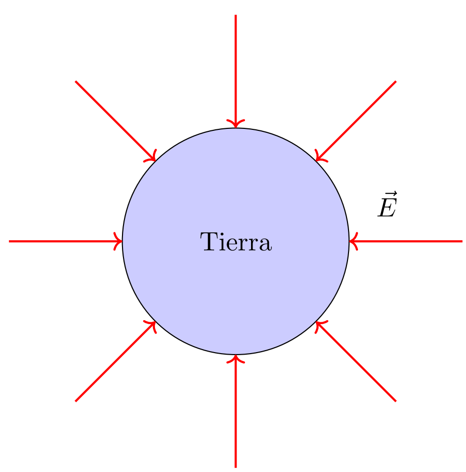
b) **Calculeu el mòdul de la força elèctrica que produirà el camp elèctric sobre un electró lliure situat a la vora de la superfície de la Terra. Calculeu la massa que ha de tenir una gota esfèrica d'aigua amb una càrrega extra d'un sol electró perquè el seu pes es compensi amb la força elèctrica. Feu un esquema en què es mostrin les forces que actuen sobre la gota. Calculeu el diàmetre d'aquesta gota d'aigua.**

Dades:
Radi de la Terra, $R_T = 6,37 \times 10^6$ m.
Densitat de l'aigua, $\rho = 10^3$ kg/m^3.
Massa de l'electró, $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg.
Superfície esfèrica: $4\pi r^2$.
Volum d'una esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$.
$|e| = 1,602 \times 10^{-19}$ C.
$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9$ Nm^2 C^{-2}.
$g = 9,81$ m/s^2.

Solución:

a) **Dibuixeu l'esfera terrestre i representeu-hi el camp elèctric al voltant de la superfície. Calculeu el valor de la càrrega total que produeix aquest camp elèctric. Per fer-ho, considereu que el camp elèctric creat per una superfície esfèrica carregada uniformement és igual al generat per tota la càrrega situada al centre de l'esfera.**

El campo eléctrico está dirigido hacia las cargas negativas y es radial debido a la geometría esférica de la Tierra. A continuación, se muestra una representación esquemática:



Sabemos que el campo eléctrico fuera de una esfera cargada uniformemente es equivalente al generado por toda la carga situada en el centro de la esfera. La magnitud del campo eléctrico está dada por:

$$|\vec{E}| = \frac{k \cdot |q|}{R_T^2}.$$

Despejando q:

$$|q| = \frac{|\vec{E}| \cdot R_T^2}{k},$$

donde:

$$\begin{aligned} |\vec{E}| &= 150 \text{ N/C}, \\ R_T &= 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}, \\ k &= 8{,}99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores:

$$|q| = \frac{150 \text{ N/C} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{8{,}99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2} = 6{,}77 \cdot 10^5 \text{ C}.$$

Dado que el campo eléctrico está dirigido hacia las cargas negativas, la carga total de la Tierra es negativa:

$$q = -6{,}77 \cdot 10^5 \text{ C}.$$

Por lo tanto, la carga total de la Tierra es $-6{,}77 \cdot 10^5$ C.

b) Calculeu el mòdul de la força elèctrica que produirà el camp elèctric sobre un electró lliure situat a la vora de la superfície de la Terra. Calculeu la massa que ha de tenir una gota esfèrica d'aigua amb una càrrega extra d'un sol electró perquè el seu pes es compensi amb la força elèctrica. Feu un esquema en què es mostrin les forces que actuen sobre la gota. Calculeu el diàmetre d'aquesta gota d'aigua.

La magnitud de la fuerza eléctrica (F_e) que actúa sobre una carga q_e en un campo eléctrico E está dada por:

$$|\vec{F_e}| = |q_e| \cdot |\vec{E}|,$$

donde:

$$\begin{aligned} |q_e| &= 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad \text{(carga del electrón)}, \\ |\vec{E}| &= 150 \text{ N/C}. \end{aligned}$$

Sustituyendo:

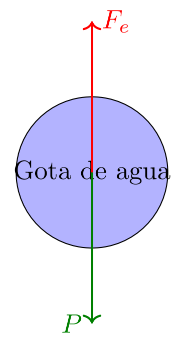
$$|\vec{F_e}| = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 150 \text{ N/C} = 2{,}403 \cdot 10^{-17} \text{ N}.$$

Para que el peso de la gota de agua (P) se compense con la fuerza eléctrica, se cumple:

$$|\vec{F_e}| = |\vec{P}| = m \cdot g.$$

Despejando la masa (m):

$$m = \frac{|\vec{F_e}|}{g} = \frac{2{,}403 \cdot 10^{-17} \text{ N}}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 2{,}45 \cdot 10^{-18} \text{ kg}.$$



La masa de una gota esférica de agua está relacionada con su volumen (V) y la densidad del agua (ρ) por:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Despejando el radio (r):

$$r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2{,}45 \cdot 10^{-18}\ \text{kg}}{4\pi \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3}} = 0{,}836 \cdot 10^{-7}\ \text{m}.$$

Entonces, el diámetro (d) es:

$$d = 2r = 2 \cdot 0{,}836 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 0{,}167\ \mu\text{m} = 167\ \text{nm}.$$

Por lo tanto, el módulo de la fuerza eléctrica es $\vec{F}_e$, la masa de la gota es $2{,}45 \cdot 10^{-18}$ kg y su diámetro es 167 nm.

Problema 4. Campo Electromagnético

Un parallamps és una barra metàl·lica vertical que atrau i dirigeix grans descàrregues de corrent cap a terra. La gran majoria de llamps núvol-terra són negatius, és a dir, són transferències de càrrega negativa del núvol cap a terra. En el moment de la descàrrega es crea un camp magnètic al voltant del parallamps que podem equiparar al creat per un fil de corrent infinit. El corrent màxim que pot assumir un parallamps és d'uns 100 kA.

a) **Calculeu el camp magnètic màxim que pot crear el parallamps a una distància de 10 cm. Feu un dibuix esquemàtic del parallamps indicant el sentit del moviment dels electrons, la intensitat de corrent i tres línies de camp magnètic. Justifiqueu el sentit de les línies de camp.**

b) **Representeu gràficament, en la quadrícula de sota, el mòdul d'aquest camp magnètic màxim en funció de la distància r al parallamps en l'interval següent: 10 cm $\leq r \leq$ 50 cm. Suposem que hi ha un electró que en el moment de la descàrrega es troba a 10 cm del parallamps i que té una velocitat de 10^3 m/s paral·lela al parallamps i cap a terra. Calculeu el mòdul de la força que crea el camp magnètic sobre l'electró i justifiqueu-ne la direcció i el sentit.**

Dades:
El mòdul del camp magnètic creat per un fil infinit per on circula un corrent I a una distància r del fil és $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m A^{-1}.
$|e| = 1,602 \times 10^{-19}$ C.

Solución:

a) **Calculeu el camp magnètic màxim que pot crear el parallamps a una distància de 10 cm. Feu un dibuix esquemàtic del parallamps indicant el sentit del moviment dels electrons, la intensitat de corrent i tres línies de camp magnètic. Justifiqueu el sentit de les línies de camp.**

Sabemos que el campo magnético (B) creado por un hilo de corriente infinito a una distancia r está dado por la fórmula:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

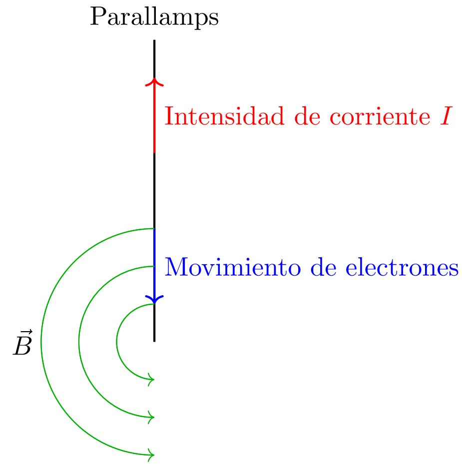
donde:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}, \\ I_{\text{máx}} &= 100{,}0 \cdot 10^3 \text{ A}, \\ r &= 10 \text{ cm} = 0{,}1 \text{ m}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores:

$$B_{\text{máx}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \cdot 100{,}0 \cdot 10^3 \text{ A}}{2\pi \cdot 0{,}1 \text{ m}} = 0{,}2 \text{ T}.$$

Entonces, el campo magnético máximo es de 0,2 T. A continuación, se presenta un esquema del parallamps con las indicaciones solicitadas:



El sentido de las líneas de campo magnético alrededor del parallamps se determina utilizando la regla de la mano derecha. Si el pulgar apunta en la dirección de la corriente (hacia arriba), los dedos envuelven el hilo en la dirección de las líneas de campo magnético (en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del parallamps). Por lo tanto, las líneas de campo magnético forman círculos concéntricos alrededor del parallamps con el sentido indicado en el dibujo.

Por lo tanto, el campo magnético máximo es de 0,2 T y es en sentido antihorario.

b) **Representeu gràficament, en la quadrícula de sota, el mòdul d'aquest camp magnètic màxim en funció de la distància r al parallamps en l'interval següent: 10 cm $\leq r \leq$ 50 cm. Suposem que hi ha un electró que en el moment de la descàrrega es troba a 10 cm del parallamps i que té una velocitat de 10^3 m/s paral·lela al parallamps i cap a terra. Calculeu el mòdul de la força que crea el camp magnètic sobre l'electró i justifiqueu-ne la direcció i el sentit.**

El campo magnético B en función de la distancia r está dado por:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

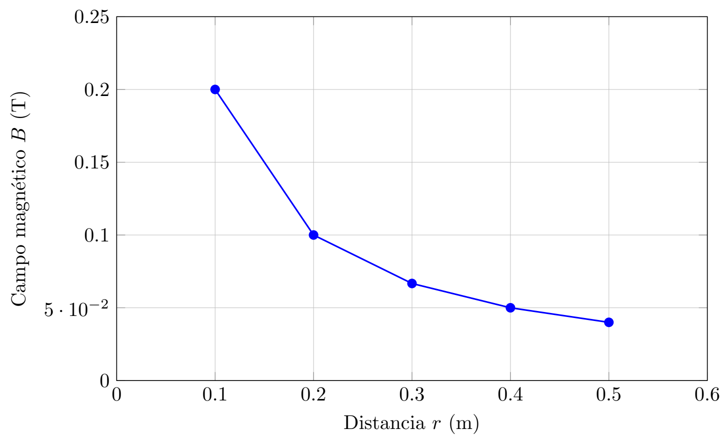
donde:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A},$$
$$I = 100{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{A},$$
$$r = 10\ \mathrm{cm\ a\ } 50\ \mathrm{cm}.$$

Calculamos algunos puntos para graficar:

$$r = 0{,}1\ \mathrm{m} \rightarrow \qquad B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^5}{2\pi \cdot 0{,}1} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{0{,}2} = 0{,}2\ \mathrm{T}$$
$$r = 0{,}2\ \mathrm{m} \rightarrow \qquad B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^5}{2\pi \cdot 0{,}2} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{0{,}4} = 0{,}1\ \mathrm{T}$$
$$r = 0{,}3\ \mathrm{m} \rightarrow \qquad B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^5}{2\pi \cdot 0{,}3} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{0{,}6} \approx 0{,}0667\ \mathrm{T}$$
$$r = 0{,}4\ \mathrm{m} \rightarrow \qquad B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^5}{2\pi \cdot 0{,}4} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{0{,}8} = 0{,}05\ \mathrm{T}$$
$$r = 0{,}5\ \mathrm{m} \rightarrow \qquad B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^5}{2\pi \cdot 0{,}5} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{1{,}0} = 0{,}04\ \mathrm{T}$$

A continuación, se presenta el gráfico de B en función de r:



La fuerza magnética ($\vec{F}_B$) que actúa sobre una carga en movimiento en un campo magnético está dada por:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \cdot \vec{B},$$

donde:

$$q = -1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad \text{(carga del electrón)},$$
$$\vec{v} = 10^3 \text{ m/s (velocidad del electrón, paralela al parallamps y hacia tierra)},$$
$$B = 0{,}2 \text{ T} \quad \text{(campo magnético a } r = 10 \text{ cm)}.$$

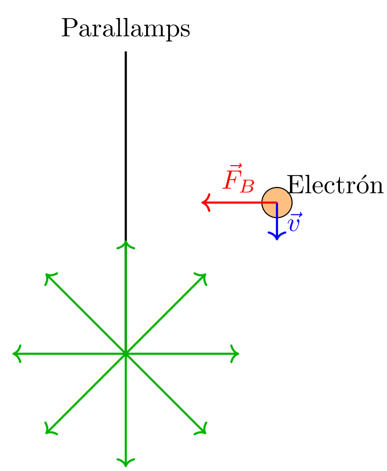
El módulo de la fuerza magnética es:

$$|\vec{F}_B| = |q|vB\sin(\theta),$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Como $\vec{v}$ es paralela al parallamps y $\vec{B}$ es perpendicular al parallamps (las líneas de campo magnético son circulares alrededor del parallamps), entonces $\theta = 90°$ y $\sin(\theta) = 1$:

$$|\vec{F}_B| = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 0{,}2 \text{ T} = 3{,}2 \cdot 10^{-17} \text{ N}.$$

Utilizando la regla de la mano derecha para determinar la dirección de la fuerza magnética: se dirige hacia el parallamps.



Por lo tanto, el módulo de la fuerza magnética es $3{,}2 \cdot 10^{-17}$ N y está dirigida hacia el parallamps.

Problema 5. Ondas

L'Ainhoa està intrigada per saber a quina altura exploten els coets llançats a la revetlla de Sant Joan. Per a poder-ho determinar se situa a una distància de 50 m del punt on es llancen els coets i enregistra, amb un sonòmetre, un nivell d'intensitat sonora de 100 decibels en l'explosió d'un coet que no s'ha enlairat.

a) **Quina potència sonora emet el coet en el moment de l'explosió? Si l'explosió ha durat $0,03$ s, quina energia sonora s'ha alliberat?**
b) **Des de la mateixa distància al punt de llançament, enregistra 90 decibels d'intensitat sonora en el cas d'un coet igual a l'anterior que s'ha enlairat verticalment i ha explotat a certa altura. Calculeu a quina altura ha explotat el coet. Si dos coets idèntics a l'anterior exploten simultàniament a la mateixa altura que abans, quin nivell d'intensitat sonora percebrà l'Ainhoa, si està situada a la mateixa posició d'abans?**

Nota:
Considereu que les ones sonores es propaguen en les tres dimensions de l'espai i la seva energia es distribueix en superfícies esfèriques.
Dades:
$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}$.
La velocitat del so en l'aire és de 340 m/s.
Superfície esfèrica: $4\pi r^2$.

Solución:

a) **Quina potència sonora emet el coet en el moment de l'explosió? Si l'explosió ha durat $0,03$ s, quina energia sonora s'ha alliberat?**

El nivel de intensidad sonora (β) se relaciona con la intensidad de la onda sonora (I) mediante la siguiente fórmula:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde:

$$\beta = 100\ \text{dB},$$
$$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}} \quad \text{(intensidad de referencia)}.$$

Despejando I:

$$100 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{10^{-12}} = 10^{10} \quad \Rightarrow \quad I = 10^{-2}\ \mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Considerando que el sonido se propaga en tres dimensiones y que su energía se distribuye uniformemente en una superficie esférica, la potencia emitida se relaciona con la intensidad y la superficie de la esfera mediante:

$$P = I \cdot 4\pi r^2,$$

donde:

$$I = 10^{-2}\ \mathrm{W\,m^{-2}},$$
$$r = 50\ \text{m}.$$

Sustituyendo los valores:

$$P = 10^{-2}\ \mathrm{W\,m^{-2}} \cdot 4\pi \cdot (50\ \text{m})^2 = 314,16\ \text{W}.$$

La energía sonora liberada se obtiene multiplicando la potencia emitida por la duración de la explosión:

$$E = P \cdot t,$$

donde:

$$P = 314,16 \text{ W},$$
$$t = 0,03 \text{ s}.$$

Sustituyendo los valores:

$$E = 314,16 \text{ W} \cdot 0,03 \text{ s} = 9,42 \text{ J}.$$

Por lo tanto, la potencia es 314, 16 W y ha liberado 9, 42 J.

b) **Des de la mateixa distància al punt de llançament, enregistra 90 decibels d'intensitat sonora en el cas d'un coet igual a l'anterior que s'ha enlairat verticalment i ha explotat a certa altura. Calculeu a quina altura ha explotat el coet. Si dos coets idèntics a l'anterior exploten simultàniament a la mateixa altura que abans, quin nivell d'intensitat sonora percebrà l'Ainhoa, si està situada a la mateixa posició d'abans?**

Utilizamos la misma fórmula que en el apartado a):

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde:

$$\beta = 90 \text{ dB},$$
$$I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}.$$

Despejando I:

$$90 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{10^{-12}} = 10^9 \quad \Rightarrow \quad I = 10^{-3} \text{ W m}^{-2}.$$

Considerando que el sonido se propaga en tres dimensiones y que su energía se distribuye uniformemente en una superficie esférica, la potencia emitida por el cohete es igual a la potencia emitida sin alzarse, ya que ambos son cohetes idénticos. Por lo tanto,

$$P = I_1 \cdot 4\pi r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi r_2^2,$$

donde:

$$I_1 = 10^{-3} \text{ W m}^{-2} \quad \text{(intensidad a la nueva altura)},$$
$$r_1 \quad \text{(distancia total desde el punto de lanzamiento)},$$
$$I_2 = 10^{-2} \text{ W m}^{-2} \quad \text{(intensidad sin alzarse)},$$
$$r_2 = 50 \text{ m} \quad \text{(distancia desde el punto de lanzamiento)}.$$

Igualando las potencias:

$$I_1 \cdot 4\pi r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi (50)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{(50)^2}{r_1^2}.$$

Sustituyendo los valores de I_1 e I_2:

$$\frac{10^{-3}}{10^{-2}} = \frac{2500}{r_1^2} \quad \Rightarrow \quad 0{,}1 = \frac{2500}{r_1^2}.$$

Despejando r_1^2:

$$r_1^2 = \frac{2500}{0{,}1} = 25000 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{25000} = 158{,}11 \text{ m}.$$

Entonces, la altura a la que ha explotado el cohete es, usando el Teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = \sqrt{158{,}11^2 - 50^2} = 150 \text{ m}.$$

Cuando dos fuentes idénticas emiten simultáneamente, la potencia total emitida es la suma de las potencias individuales:

$$P_{\text{total}} = 2P.$$

La intensidad sonora total se relaciona con la potencia y la superficie:

$$I_{\text{total}} = \frac{P_{\text{total}}}{4\pi r^2} = \frac{2P}{4\pi r^2} = 2 \cdot \frac{P}{4\pi r^2} = 2I,$$

donde:

$$I = 10^{-3} \text{ W m}^{-2} \quad \text{(intensidad de una fuente)}.$$

Entonces,

$$I_{\text{total}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-2}.$$

Calculamos el nuevo nivel de intensidad sonora:

$$\beta_{\text{total}} = 10 \cdot \log\left(\frac{I_{\text{total}}}{I_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}}\right) = 93{,}01 \text{ dB}.$$

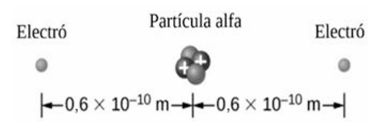
Por lo tanto, la altura a la que ha explotado el cohete es 150 m y el nivel de intensidad sonora percibido por Ainhoa será de 93 dB cuando explotan dos cohetes idénticos.

Problema 6. Física Moderna

El poloni ($Z = 84$) fou descobert el 1898 per Marie Sklodowska-Curie i Pierre Curie. L'isòtop de poloni amb un temps de semidesintegració més llarg és el Po-210, que el té de 138 dies. Es desintegra per emissió d'una partícula alfa i origina un isòtop estable de plom (Pb).

a) **Escriviu la desintegració del Po-210. Si l'activitat inicial per unitat de massa del Po-210 és de $1,66 \times 10^{14}$ Bq/g, quina serà l'activitat de 5 mg d'aquest element al cap d'una setmana?**

b) **Els nuclis d'heli que es produeixen en les desintegracions alfa no triguen a captar dos electrons. Suposem que es forma un àtom d'heli en dos passos ben diferenciats. Primerament, es transporta des d'una distància molt gran un primer electró a $0,6 \times 10^{-10}$ m de la partícula alfa i es manté allà. Posteriorment, un segon electró es porta a l'altra banda de la partícula alfa a $0,6 \times 10^{-10}$ m. La configuració final es mostra en la figura.**



Calculeu el treball realitzat pel camp elèctric en cada un dels dos passos. Quina és l'energia potencial electroestàtica de la configuració final?

Dades:
$|e| = 1,602 \times 10^{-19}$ **C.**
$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9$ **Nm^2 C^{-2}.**

Solución:

a) **Escriviu la desintegració del Po-210. Si l'activitat inicial per unitat de massa del Po-210 és de $1,66 \times 10^{14}$ Bq/g, quina serà l'activitat de 5 mg d'aquest element al cap d'una setmana?**

Imponiendo la conservación del número de nucleones y de la carga eléctrica, se teiene que:

$$^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow ^{206}_{82}\text{Pb} + ^{4}_{2}\text{He}.$$

Queremos obtener la actividad después de una semana. Se conocen los siguientes datos:

$$A_0 = 1,66 \cdot 10^{14} \text{ Bq/g},$$

$$m = 5 \text{ mg} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ g},$$

$$t_{1/2} = 138 \text{ días},$$

$$t = 7 \text{ días}.$$

La actividad inicial para 5 mg es:

$$A_0^{\text{total}} = A_0 \cdot m = 1,66 \cdot 10^{14} \text{ Bq/g} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 8,3 \cdot 10^{11} \text{ Bq}.$$

El coeficiente de desintegración (λ) se calcula mediante:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0,693}{138 \text{ días}} = 5,023 \cdot 10^{-3} \text{ días}^{-1}.$$

La actividad después de una semana es:

$$A(t) = A_0^{\text{total}} \cdot e^{-\lambda t} = 8,3 \cdot 10^{11} \text{ Bq} \cdot e^{-5,023 \cdot 10^{-3} \text{ d}^{-1} \cdot 7 \text{ d}} = 8,01 \cdot 10^{11} \text{ Bq}.$$

Por lo tanto, la actividad después de una semana es $\mathbf{8,01 \cdot 10^{11}}$ Bq.

b) **Els nuclis d'heli que es produeixen en les desintegracions alfa no triguen a captar dos electrons. Suposem que es forma un àtom d'heli en dos passos ben diferenciats. Primerament, es transporta des d'una distància molt gran un primer electró a $\mathbf{0,6 \times 10^{-10}}$ m de la partícula alfa i es manté allà. Posteriorment, un segon electró es porta a l'altra banda de la partícula alfa a $\mathbf{0,6 \times 10^{-10}}$ m. La configuració final es mostra en la figura. Calculeu el treball realitzat pel camp elèctric en cada un dels dos passos. Quina és l'energia potencial electroestàtica de la configuració final?**

Se conocen los siguientes datos:

$$q_e = -1,602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C},$$
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}},$$
$$r = 0,6 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}.$$

El potencial eléctrico debido a la partícula alfa es:

$$\Delta V_1 = k \cdot \frac{q_\alpha}{r} = 8,99 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}{0,6 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 48,006\ \mathrm{V}.$$

El trabajo realizado por el campo eléctrico es:

$$W_{e1} = -q_e \cdot \Delta V_1 = 1,602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 48,006\ \mathrm{V} = 7,69 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}.$$

El potencial eléctrico existente al trasladar el segundo electrón incluye la contribución de la partícula alfa y del primer electrón:

$$\Delta V_2 = k \cdot \frac{q_\alpha}{r} - k \cdot \frac{q_e}{2r} = 48,006\ \mathrm{V} - \frac{8,99 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}{2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 36,006\ \mathrm{V}.$$

El trabajo realizado por el campo eléctrico es:

$$W_{e2} = -q_e \cdot \Delta V_2 = 1,602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 36,006\ \mathrm{V} = 5,77 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}.$$

La energía potencial final es la suma de los trabajos realizados en ambos pasos, pero en negativo:

$$U_{\mathrm{final}} = -(W_{e1} + W_{e2}) = -7,69 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} - 5,77 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = -1,346 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{J}.$$

Por lo tanto, los trabajos son, respectivamente, $\mathbf{7,69 \cdot 10^{-18}}$ J y $\mathbf{5,77 \cdot 10^{-18}}$ J, y la energía potencial final es $\mathbf{-1,346 \cdot 10^{-17}}$ J.

Problema 7. Física Moderna

Observem que en una mostra metàl·lica apareix l'efecte fotoelèctric quan la il·luminem amb llum monocromàtica de longituds d'ona més petites o iguals a 650 nm.

a) **Calculeu el treball d'extracció del metall. Determineu el potencial de frenada si il·luminem el metall amb llum de 300 nm.**
b) **Trobeu l'expressió de la velocitat dels electrons en funció de la longitud d'ona incident per a aquest metall. Calculeu la velocitat dels electrons per a una longitud d'ona incident de 500 nm i la longitud d'ona de De Broglie associada a aquests electrons.**

Dades:
$c = 3,00 \times 10^8$ **m/s.**
$|e| = 1,602 \times 10^{-19}$ **C.**
$m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ **kg.**
$h = 6,626 \times 10^{-34}$ **J s.**

Solución:

a) **Calculeu el treball d'extracció del metall. Determineu el potencial de frenada si il·luminem el metall amb llum de 300 nm.**

La longitud de onda umbral es $\lambda_0 = 650\,\text{nm} = 650 \cdot 10^{-9}$ m. La frecuencia umbral correspondiente es:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{650 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 4,62 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

El trabajo de extracción del metal es la energía mínima necesaria para extraer un electrón, es decir:

$$W_0 = hf_0 = (6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s})(4,62 \cdot 10^{14} \text{ Hz}) = 3,06 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Para expresar el trabajo de extracción en electronvoltios:

$$W_0 = \frac{3,06 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J eV}^{-1}} = 1,91 \text{ eV}.$$

Cuando iluminamos el metal con luz de $\lambda = 300\,\text{nm}$, la frecuencia es:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{300 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 1,00 \cdot 10^{15} \text{ Hz}.$$

La energía cinética máxima de los electrones es:

$$E_\text{c} = hf - W_0 = (6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s})(1,00 \cdot 10^{15} \text{ Hz}) - 3,06 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,57 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

El potencial de frenado es:

$$V_0 = \frac{E_\text{c}}{|e|} = \frac{3,57 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 2,23 \text{ V}.$$

Por lo tanto, el trabajo de extracción es $W_0 = 1,91$ eV y el potencial de frenado es $V_0 = 2,23$ V.

b) **Trobeu l'expressió de la velocitat dels electrons en funció de la longitud d'ona incident per a aquest metall. Calculeu la velocitat dels electrons per a una longitud d'ona incident de 500 nm i la longitud d'ona de De Broglie associada a aquests electrons.**

A partir de la ecuación del efecto fotoeléctrico:

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} m_e v^2 = hf - W_0 = \frac{hc}{\lambda} - W_0.$$

Despejando la velocidad v:

$$v(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{m_e}\left(\frac{hc}{\lambda} - W_0\right)} = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{c}}}{m_e}}.$$

Para $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s})(3,00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}})}{500 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 3,98 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

La energía cinética es:

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = 3,98 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} - 3,06 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 9,20 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{J}.$$

La velocidad de los electrones es:

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{c}}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(9,20 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{J})}{9,11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 4,51 \cdot 10^{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

La longitud de onda de De Broglie es:

$$\lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{m_e v} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}}{(9,11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg})(4,51 \cdot 10^{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}})} = 1,62 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la velocidad de los electrones es $v = 4,51 \cdot 10^{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ y la longitud de onda de De Broglie es $\lambda_{\mathrm{dB}} = 1,62\ \mathrm{nm}$.